УДК: 512.563.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ В РАЗЛИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМАХ

Лебедева Евгения Игоревна

Арзамасский филиал ФГАО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

E-mail: www.moria.lize@gmail.com

В данной статье рассмотрены основы алгебры логики, отражены особенности видов нормальных форм. Теоретическую часть составляет изучение основ алгебры логики, операции над высказываниями, основные равносильные преобразования и свойства равносильности. Были изучены формулировки каждой нормальной формы, а также способы получения каждой из них. Практическую часть составляет решение 2 формул, для каждой из которых была найдена дизъюнктивная, совершенная дизъюнктивная, конъюнктивная, совершенная конъюнктивная и алгебраическая нормальная форма. Поиск нормальных форм был произведен различными способами для каждой формы, основываясь на теории алгебры логики. В результате, взаимосвязи между нормальными формами были сведены в единую схему.

Ключевые слова: алгебра логики, нормальные формы, булева алгебра, взаимосвязь.

REPRESENTATION OF BOOLEAN ALGEBRA FORMULAS IN VARIOUS NORMAL FORMS

Lebedeva Evgeniia Igorevna

This article discusses the fundamentals of the algebra of logic, reflects the peculiarities of the types of normal forms. The theoretical part of the analysis of the basic properties of logic, operations on statements, basic equivalent transformations and properties of equivalence. We studied the formulations of each normal form, as well as ways to get each of them. The practical part of the solution consists of two parts: for each of them a disjunctive, perfect disjunctive, conjunctive, perfect conjunctive and algebraic normal form was found. The search for normal forms was carried out in different ways for each form, based on the theory of the algebra of logic. As a result, the relationships between normal forms were consolidated into a single scheme. Through this scheme, it is possible to understand how to get a certain idea, if given another.

Keywords: algebra of logic, normal forms, Boolean algebra, interconnection.

Логические выражения и правила их представления имеют широкое применение в программировании, а также многие логические операции используются в криптографии [4, с.376]. Выделяют три основные нормальные формы, а именно: дизъюнктивную, конъюнктивную и алгебраическую [5, с.164]. ДНФ и КНФ имеют место при автоматическом доказательстве теорем, которое используется в производстве при разработке программного обеспечения и верификации интегральных схем [4, с.376]. АНФ, или полином Жегалкина, применяется в программировании микроконтроллеров [4, с.379]. Но, если рассматривать с математической точки зрения, каждое из этих представлений имеет своё преимущество перед другими.

Исходя из этого, основная задача исследования следующая: теоретическое и практическое изучение различных способов представления формул булевой алгебры.

Можно выделить следующие подзадачи:

1. изучить основные понятия алгебры логики, в частности булевой алгебры;
2. изучить основные способы построения формул булевой функций в виде ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ, АНФ;
3. решить задачи на представление формул в различных видах;
4. выявить взаимосвязь между основными нормальными формами.

Раздел математики, посвященный изучению высказывания со стороны математических логических операций, называется алгеброй логики. Ввел алгебру логики в середине XIX века Джордж Буль, исследовавший алгебру высказываний.

Основными элементами алгебры логики являются высказывания – высказывания, о которых можно судить, истинны одни или ложны. Например, фраза «сегодня выпал снег» является высказыванием, так как можно сказать, правдиво ли оно. Но выражение «я не люблю кофе» высказыванием не является, ведь оно субъективно.

На множестве высказываний заданы следующие операции: отрицание (языковая связка «не»), конъюнкция (языковая связка «и»), дизъюнкция (языковая связка «или»), импликация (языковая связка «если….,то…») и эквиваленция (языковая связка «тогда и только тогда»).

Отрицание – это высказывание, противоположное данному. Обозначается чертой над суждением. Так, для высказывания x отрицанием будет $\bar{x}$.

Конъюнкция – это логическое выражение от двух простых высказываний, которое является истинным только в том случае, когда оба высказывания истинны. Обозначается конъюнкция знаком ∧.

Дизъюнкция – это логическое выражение от двух простых высказываний, которое является ложным только в том случае, когда оба высказывания ложны. Обозначается дизъюнкция – ∨.

Импликация – сложное логическое выражение от двух суждений, обозначающее следствие одного из другого, которое ложно только в том случае, когда из истинного высказывания следует ложное. Обозначение импликации →.

Эквиваленция – сложное логическое выражение от двух суждений, являющееся истинным в том случает, когда они имеют одинаковую истинность. Обозначение эквиваленции – $\leftrightarrow$.

В таблице 1 более конкретно отображены все действия логических выражений [4, с.32, с.33].

Таблица 1

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Элементарные высказывания складываются в более сложную структуру – формулу алгебры высказываний. Это есть выражение, полученное с соблюдением следующих правил [5, с.31]:

1. каждое элементарное высказывание есть формула;
2. если A и B – формулы, то $\bar{A}, \bar{B}, A \to B, A \leftrightarrow B, A \wedge B, A \vee B$ также являются формулами;
3. никаких других формул, кроме оговоренных в пунктах 1 и 2, нет;
4. процесс построения более сложных формул бесконечен.

Формулы алгебры логики могут быть равносильными.

Переход от одной равносильной формулы к другой называют равносильным преобразованием и совершают его с помощью законов алгебры логики [6, с.34].

1. $\bar{\bar{x}} \cong x$ (закон снятия двойного отрицания);
2. $x \wedge y \cong y \wedge x$ (коммутативность конъюнкции);
3. $x \vee y \cong y \vee x$ (коммутативность дизъюнкции);
4. $x \wedge (y \wedge z) \cong (x \wedge y) \wedge z$ (ассоциативность конъюнкции);
5. $x \vee (y \vee z) \cong (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность дизъюнкции);
6. $x \wedge (y \vee z) \cong (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);
7. $x \vee (y \wedge z) \cong (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);
8. $x \wedge \bar{x} \cong 0$ (закон отрицания противоречия);
9. $x \vee \bar{x} \cong 1$ (закон исключения третьего);
10. $x \wedge (x \vee y) \cong x$ (закон поглощения);
11. $x \vee (x \wedge y) \cong x$ (закон поглощения);
12. $x \vee x \cong x$ (закон идемпотентности);
13. $x \wedge x \cong x$ (закон идемпотентности);
14. $\overline{x \wedge y} \cong \bar{x} \vee \bar{y}$ (закон де Моргана);

15. $\overline{x \vee y} \cong \bar{x} \wedge \bar{y}$ (закон де Моргана);

16. $x \leftrightarrow y \cong (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \cong (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ (выражение одних операций через другие).

Булева алгебра является частным случаем алгебры логики. Это есть совокупность подмножеств $x, y, z, \ldots$ непустого множества M, имеющего выделенные элементы 0 и 1 с введенными на нем двумя бинарными операциями: конъюнкция и дизъюнкция и одной унарной операцией отрицание, на которой выполняются законы 1-15 [7, с.13].

Для Булевой алгебры введены следующие обозначения [7, с.14]:

1. x' - отрицание;
2. $x \cdot y$ – конъюнкция;
3. $x \in y \cong y \ni x$ – антиимпликация;
4. $(x \cdot y)' \cong x|y$ – штрих Шеффера;
5. $(x \vee y)' \cong x \downarrow y$ – стрелка Пирса;
6. $(x \leftrightarrow y)' \cong x \oplus y$ – полином Жегалкина.

Формулы, содержащие в себе только три вида операций: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание называют нормальными формами. Они более удобны для применения, чем формулы в свободном виде[4, с.154].

Существует пять основных видов нормальных форм: дизъюнктивная, совершенная дизъюнктивная, конъюнктивная, совершенная конъюнктивная и алгебраическая.

Построение нормальных форм зачастую базируется на объединение элементарных конструкций. Таковыми являются элементарные конъюнкция (пр. $x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$) и дизъюнкция (пр. $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$).

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций, то есть выражение вида $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p$где все K_i, $i = 1,2,\ldots,p$ являются элементарными конъюнкциями (не обязательно различными) [2, с.93]. При этом каждую формулу алгебры высказываний можно привести к виду ДНФ [5, с.42].

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций, то есть выражение вида $K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_p$где все K_i, $i = 1,2,\ldots,p$ являются элементарными дизъюнкциями (не обязательно различными) [5, с.43]. Каждую формулу алгебры высказываний можно привести к виду КНФ [5, с.43]

Среди множества ДНФ существует такие формы, которые для каждой формулы единственны, а именно – совершенные дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ). Аналогично для КНФ существую совершенные конъюнктивные формы (СКНФ).

Полной элементарной конъюнкцией (ПЭК) (полной элементарной дизъюнкцией) называется конъюнкция (дизъюнкция) от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – это дизъюнкция нескольких попарно различных ПЭК от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [5, с.44]. Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) же называют конъюнкция нескольких попарно различных ПЭД от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [5, с.47].

Каждая формула алгебры высказывания, отличная от противоречия (тавтологии), может быть приведена к виду СДНФ (СКНФ) [5, с.44]. И такое представление единственно.

Существует два способа получения СДН- (СКН-)формы [3, с.410]:

- методом равносильных преобразований из ДНФ (КНФ);
- методом таблицы истинности.

Рассмотрим алгоритм нахождения СДНФ (СКНФ) с помощью таблицы истинности:

1. составить таблицу истинности формулы;
2. выписать кортежи, при которых функция истинна;
3. получить полные элементарные конъюнкции (ПЭД), соответствующие кортежам (отрицание ставится над той переменной, которая принимает значение 0(1));
4. соединить ПЭК (ПЭД) дизъюнкцией.

Если формула является тождественно ложной, то в ней не будет кортежей, при которых она становилась бы истинной. Следовательно, противоречие не имеет СДН-форму.

Если формула является тождественно истинной, то в ней не будет кортежей, при которых она становилась бы ложной. Следовательно, тавтология не имеет СКН-форму.

В булевой алгебре вводится еще одна операция – сложение по модулю два. Это бинарная логическая операция, применяемая на множестве булевых функций, полученное в результате которой выражение истинно тогда и только тогда, когда входящие в него элементарные суждения имеют противоположные истинности. Обозначается - ⊕ [2, с.172]. Таблица истинности этой операции следующая [2, с.173] (Таблица 2).

Таблица 2

x	y	x⊕y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Выразить сложение по модулю два можно выразить следующим образом: $x \oplus y \cong \overline{x \leftrightarrow y}$.

Операция обладает следующими свойствами [2, с.173]:

1. $x \oplus y \cong y \oplus x$;
2. $(x \oplus y) \oplus z \cong x \oplus (y \oplus z)$;
3. $x(y \oplus z) \cong xy \oplus xz$;
4. $x \oplus x \cong 0$;
5. $0 \oplus x \cong x$;
6. $\bar{x} \cong x \oplus 1$.

Алгебраическая нормальная форма (Полином Жегалкина) – это логическая функция, использующая две операции: конъюнкцию и сложение по модулю два [1, с.17]. Такое представление существует для любой формулы Булевой алгебры, при том единственное.

Общий вид АНФ для формулы от n-переменных следующий:
$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_n \oplus \dots \oplus$
$\oplus a_{1\dots n} x_1 \dots x_n$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{12}, a_{13} \dots a_{1\dots n} \in \{1; 0\}$.

Существует четыре различных способа представления формулы в виде АНФ [1, с.18]:

1. метод неопределенных коэффициентов;
2. метод треугольника Паскаля;
3. предобразование ДНФ;
4. преобразование СДНФ.

В процессе решения задач работы, нами были рассмотрены следующие формулы [2, с.216]:

1. $f(x_1, x_2) = \overline{(x_1 \vee x_2)} x_1 \overline{x_2}$
2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee (x_1 \to \overline{x_3})$

На основе решения 1 примера была выявлена взаимосвязь между формами представления формул булевой алгебры, а именно: ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ, АНФ.

1. $f(x_1, x_2) = \overline{(x_1 \vee x_2)} x_1 \overline{x_2}$

ДНФ данной формулы найдем способом равносильных преобразований.

$f(x_1, x_2) = \overline{(x_1 \vee x_2)} x_1 \overline{x_2} \overset{\overline{x \vee y} \cong \bar{x} \wedge \bar{y}}{\cong} \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_1 \overline{x_2} \overset{x \wedge \bar{x} \cong 0}{\cong} 0 \cdot \overline{x_2}\,\overline{x_2} \overset{x \wedge x \cong x}{\cong} 0 \cdot \overline{x_2} \overset{x \wedge 0 \cong 0}{\cong} 0$ – ДНФ.

Используя метод таблицы истинности найдем СДНФ.

x_1	x_2	$\overline{x_2}$	$x_1 \vee x_2$	$\overline{(x_1 \vee x_2)}$	$x_1 \overline{x_2}$	$\overline{(x_1 \vee x_2)} x_1 \overline{x_2}$
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0

Кортежей, тождественных 1, у данной формулы нет. Следовательно, СДНФ представления у неё нет.

КНФ выразим из формулы способом равносильных преобразований.

$f(x_1,x_2) = \overline{(x_1 \vee x_2)}x_1\overline{x_2} \overset{\overline{x \vee y} \cong \bar{x} \wedge \bar{y}}{\cong} \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_1\overline{x_2} \overset{x \wedge x \cong x}{\cong} x_1\overline{x_1}\,\overline{x_2} \overset{x \wedge \bar{x} \cong 0}{\cong} 0 \cdot \overline{x_2} \overset{x \wedge 0 \cong 0}{\cong} 0$

С помощью таблицы истинности найдем СКНФ.

ПЭД:

(1;1) – $\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

(1;0) – $\overline{x_1} \vee x_2$

(0;1) – $x_1 \vee \overline{x_2}$

(0;0) – $x_1 \vee x_2$

$f(x_1,x_2) = \overline{(x_1 \vee x_2)}x_1\overline{x_2} \cong (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_2)$ – СКНФ.

Из всех возможных способов нахождения АНФ используем метод неопределенных коэффициентов.

$f(0,0)$	$a_0 \cong 0$
$f(1,0)$	$a_0 \oplus a_1 \cong 0 \Rightarrow 0 \oplus a_1 \cong 0 \Rightarrow a_1 \cong 0$
$f(0,1)$	$a_0 \oplus a_2 \cong 0 \Rightarrow 0 \oplus a_2 \cong 0 \Rightarrow a_2 \cong 0$
$f(1,1)$	$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} \cong 0 \Rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12} \cong 0 \Rightarrow a_{12} \cong 0$

$f(x_1,x_2) = \overline{(x_1 \vee x_2)}x_1\overline{x_2} \cong 0$

Получаем, что для тождественно ложно формулы нет совершенной дизъюнктивной нормальной формы, при этом совершенная конъюнктивная нормальная форма будет состоять из всех возможных полных элементарных дизъюнкций. Оставшиеся три нормальные формы (АНФ, ДНФ, КНФ) будут равносильны нулю.

2. $ff(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 \vee (x_1 \to \overline{x_3})$

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 \vee (x_1 \to \overline{x_3}) \overset{x \to y \cong \bar{x} \vee y}{\cong} x_1x_2x_3 \vee (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \overset{x \vee (y \vee z) \cong (x \vee y) \vee z}{\cong}$
$\overset{x \vee (y \vee z) \cong (x \vee y) \vee z}{\cong} \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$ – ДНФ.

Найдем СДНФ, используя тождественные преобразования из ДНФ.

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 \vee (x_1 \to \overline{x_3}) \cong \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \overset{x \vee \bar{x} \cong 1}{\cong} \overline{x_1}(x_2 \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee$
$\vee (x_1 \vee \overline{x_1})(x_2 \vee \overline{x_2})\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \overset{x \wedge (y \vee z) \cong (x \wedge y) \vee (x \wedge z)}{\cong} \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee$
$\vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \overset{x \vee x \cong x}{\cong} x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee$
$\vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ – СДНФ.

Выразим КНФ из дизъюнктивной нормальной формы с помощью основных равносильностей.

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 \vee (x_1 \to \overline{x_3}) \cong \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \overset{x \vee (y \wedge z) \cong (x \vee y) \wedge (x \vee z)}{\cong} (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_1) \cdot$
$\cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_3) \overset{x \vee \bar{x} \cong 1}{\cong} (1 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee 1) \overset{x \vee 1 \cong 1}{\cong} 1(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_2)1 \overset{x \wedge 1 \cong x}{\cong}$

$\overset{x\wedge 1\cong x}{\cong}$ $\overline{x_1}\vee\overline{x_3}\vee x_2$ – КНФ.

Найдём таблицу истинности для формулы, чтобы с её помощью найти СКНФ.

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3\vee(x_1 \to \overline{x_3})$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_3}$	x_1x_2	$x_1x_2x_3$	$x_1 \to \overline{x_3}$	$x_1x_2x_3\vee(x_1 \to \overline{x_3})$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1

ПЭД:

(1;0;1) – $\overline{x_1}\vee\overline{x_2}$

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3\vee(x_1 \to \overline{x_3}) \cong \overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}$ – СКНФ.

Для нахождения алгебраической нормальной формы воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$f(0,0,0)$	$a_0 \cong 1$
$f(0,0,1)$	$a_0 \oplus a_3 \cong 1 \;\Rightarrow\; 1\oplus a_3 \cong 1 \;\Rightarrow\; a_3 \cong 0$
$f(0,1,0)$	$a_0 \oplus a_2 \cong 1 \;\Rightarrow\; 1\oplus a_2 \cong 1 \;\Rightarrow\; a_2 \cong 0$
$f(0,1,1)$	$a_0\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_{23} \cong 1 \;\Rightarrow 1\oplus 0\oplus 0\oplus a_{23} \cong 1 \;\Rightarrow a_{23} \cong 0$
$f(1,0,0)$	$a_0 \oplus a_1 \cong 1 \;\Rightarrow\; 1\oplus a_1 \cong 1 \;\Rightarrow\; a_1 \cong 0$
$f(1,0,1)$	$a_0\oplus a_1\oplus a_3\oplus a_{13} \cong 0 \;\Rightarrow 1\oplus 0\oplus 0\oplus a_{13} \cong 0 \;\Rightarrow a_{13} \cong 1$
$f(1,1,0)$	$a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_{12} \cong 1 \;\Rightarrow 1\oplus 0\oplus 0\oplus a_{12} \cong 1 \;\Rightarrow a_{12} \cong 0$
$f(1,1,1)$	$a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_{13}\oplus a_{12}\oplus a_{23}\oplus a_{123} \cong 1 \;\Rightarrow 1\oplus 0\oplus 0\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus$ $\oplus 0\oplus a_{23} \cong 1 \;\Rightarrow a_{123} \cong 1$

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3\vee(x_1 \to \overline{x_3}) \cong \overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3} \cong 1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3$ - АНФ.

Таким образом, объединив теоретические и практические знания, получаем следующую схему:

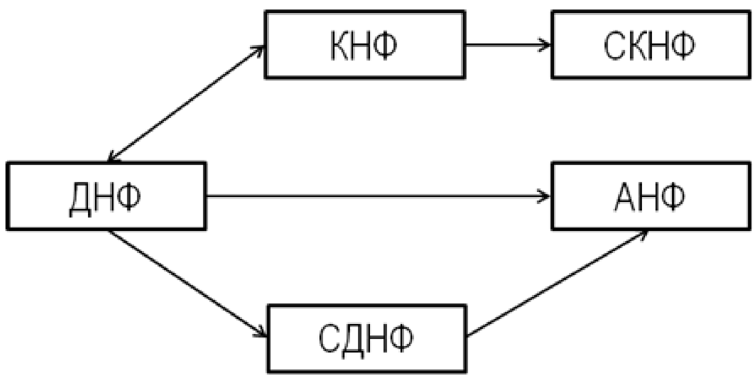

Схема взаимосвязи нормальных форм

Алгебру логики вводили как единый универсальный язык, ввиду чего любое высказывание упрощалось до буквенного обозначения, а взаимоотношения между ними – до смысловых знаков. Она удобна и универсальна при решении определенных задач технического и профессионального уровня, но при этом бессмысленна при художественном тексте.

Каждая нормальная форма имеет свое применение, ввиду чего зачастую необходимо от одной перейти к другой. И схематическое изображение упрощает данную задачу.

Список литературы

1. Булгакова И.Н. Дискретная математика. Элементы теории, задачи и упражнения. Часть 2: Учебное пособие для вузов (2-е издание). – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2008. – 76 с.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

3. Гуц А.К. Математическая логика и теория алгоритмов. Изд. – 3, испр. М.: УРСС, 2016. – 128 с.

4. Логачёв О.А, Сальников А.А., Ященко В.В. Булевы фунции в теории кодирования и криптологии – МЦНМО, 2004. – 470с.

5. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику /Э. Мендельсон. – М.: Либроком, 2010. – 320 с.

6. Сангалова М.Е. Проектно-ориентированное обучение математической логике. Учебно-методическое пособие. – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2013. – 132 с.

7. Супрун В.П. Основы теории булевых функций. / В.П. Супрун – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 208 с.