Электронный научно-практический журнал
«МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК» МАРТ 2019
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 3054

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Русин Д.С., Устименко В.В.

Сибирский федеральный университет

Email: rusin199812@mail.ru, zeya1998@mail.ru

В данной статье рассмотрены определенные интегралы для произведений ассоциированных функций Лежандра с функциями Бесселя, ассоциированных функций Лежандра и полиномов Чебышева первого рода с использованием ортогональности и метода интегральных преобразований.

Ключевые слова: определенные интегралы, связанные функции Лежандра, функции Ферерса, полиномы Чебышева первого рода.

DEFINED INTEGRALS USING THE METHOD OF INTEGRAL TRANSFORMATIONS AND PERPENDICULARITY FOR LINEAR SPACES

Rusin D.S. Ustimenko V.V.

This article discusses certain integrals for products of associated Legendre functions with Bessel functions, associated Legendre functions, and Chebyshev polynomials of the first kind using orthogonality and integral transformations.

Keywords: definite integrals, coupled Legendre functions, Ferrers functions, Chebyshev polynomials of the first kind.

В [1] предоставляются некоторые определенные теоремы о сложных и бесконечных рядах которые возникают из разложения фундаментальных решений эллиптических уравнений и разделяют уравнение Лапласа. Данная работа производится для получения новых интегралов из некоторых теорем сложения описанных выше. Для выполнения работы необходимо использовать ортогональность и интегральные преобразования.

Определенные интегралы с применением преобразования Ханкеля

Мы используем следующий результат, где для x ∈ (0, ∞) мы определяем

$$F(r \pm 0) = \lim_{x \to r\pm} F(x) \tag{1}$$

Теорема 1. Пусть F: (0,∞) → C таково, что

$$\int_0^\infty \sqrt{x}|F(x)|dx < \infty \tag{2}$$

и пусть $v \geq -\frac{1}{2}$. Затем

$$\frac{1}{2} * \left(\mathrm{F(r+0)+F(r-0)}\right) = \int_0^\infty \mathrm{uJ_v(ur)} \int_0^\infty \mathrm{xF(x)J_v(ux)dxdu} \tag{3}$$

при условии, что положительное число r лежит внутри интервала, в котором F (x) имеет конечную вариацию.

В качестве иллюстрации метода интегральных преобразований приведем следующий пример. Мы имеем для $Re\ a, b, c > 0, Re\ v > -\frac{1}{2}$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-ka} J_v(kb) J_v(kc) dk = \frac{1}{\pi * \sqrt{bc}} Q_{v-1/2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right) \tag{4}$$

Где J_v:C / (- ∞,0]→C, для порядка ν ∈ C - функция Бесселя первого рода и $Q_v^\mu: \mathbb{C}/(-\infty,1] \to \mathbb{C}$ для v + μ ∉−N со степенью ν и порядком μ является ассоциированной функцией Лежандра второго рода. Функция Лежандра второго рода $Q_v: \mathbb{C}/(-\infty,1] \to \mathbb{C}$ для v ∉ −N определяется в терминах функции Лежандра нулевого порядка второго рода $Q_v(z) = Q_v^0(z)$. Если мы применим теорему 1 к функции F: (0, ∞) → C, определенной

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{c}}{k} e^{-ka} J_v(kc) \tag{5}$$

тогда условие (2) выполнено. Если мы будем использовать (5) в (3), то получим следующий результат. Если $Re\ a, c > 0, Re\ v > -\frac{1}{2}$, тогда

$$\int_0^\infty J(kb) Q_{v-1/2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right) \sqrt{b} db = \frac{\pi\sqrt{c}}{k} e^{-ka} J_v(kc).$$

После чего применим формулу Уиппла к расширению Харди, чтобы получить

$$\int_0^\infty e^{-ka} J_v(kb) J_v(kc) dk$$
$$= \frac{-2a}{\pi * \sqrt{bc}(a^2+(b+c)^2)^{1/2} * (a^2+(b-c)^2)^{1/2}} Q_{v-1/2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right) \tag{6}$$

для $Re\ a, b, c > 0, Re\ v > -1$, также уравнение (5) может быть получено из (3) путем дифференциации по отношению к α. Используя этот интеграл и теорему 1, докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $Re\ a, b, c > 0, Re\ v > -1$. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{J_v(kb)}{(a^2+(b+c)^2)^{1/2} * (a^2+(b-c)^2)^{1/2}} Q_{v-1/2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right) \sqrt{b} db = -\frac{\pi\sqrt{c}}{2a} e^{-ka} J_v(kc).$$

Доказательство. Применяя теорему 1 к функции F: (0, ∞) → C, определим

$$F(k)=\frac{\pi\sqrt{c}}{2a}e^{-ka}J_v(kc)$$

Используя (6) получаем желаемый результат.

Теперь мы приведем еще один пример того, как интегральное разложение для фундаментального решения уравнения Лапласа на R3 в параболических координатах может быть использовано для доказательства нового определенного интеграла

Теорема 3. Пусть $m \in N_0$, $\lambda' \in (0,\infty)$, $\mu, \mu' \in (0,\infty)$, $\mu \neq \mu'$ 0 , $k \in (0,\infty)$, затем

$\int_0^\infty Q_{m-1/_2}(x)J_m(k\lambda)\sqrt{\lambda}d\lambda = 2\pi\sqrt{\lambda'\mu\mu'}\,J_m(k\lambda')I_m(k\mu_<)K_m(k\mu_>)$, где

$x=\frac{4\lambda^2\mu^2+4\lambda'^2\mu'^2+(\lambda^2-\lambda'^2+\mu'^2-\mu^2)^2}{8\lambda\lambda'\mu\mu'}>1$ и $\mu_{\gtrless}={}^{min}/_{max}\{\mu,\mu'\}$

Доказательство. Применим теорему 1 к функции F: $(0,\infty)\to C$, определенной как

$F(k)=2\pi\sqrt{\lambda'\mu\mu'}J_m(k\lambda')I_m(k\mu_<)K_m(k\mu_>)$, где I_v:C / (- ∞,0]→C для порядка $\nu \in C$ – это модифицированная функция Бесселя первого рода и $K_v: C\,/\,(-\infty,0]\to C$ для $\nu\in C$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. Опять же, мы видим, что условие (1) выполняется. Мы получаем желаемый результат, а именно, для $\lambda \in (0,\infty)$,

$$\int_0^\infty J_m(k\lambda')I_m(k\mu_<)K_m(k\mu_>)kdk=\frac{Q_{m-1/_2}(x)}{2\pi\sqrt{\lambda\lambda'\mu\mu'}}.$$

Определенные интегралы из соотношений ортогональности. Степень ортогональности для связанных функций Лежандра с целой степенью и порядком

Мы используем соотношение степени ортогональности для функции Ферерса первого рода с целочисленной степенью и порядком, а именно

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{n,n'},\qquad(7)$$

где $m,n,n'\in N_0$, и $m\le n, m\le n'$, мы используем связанную функцию Лежандра первого типа, $P_\nu^\mu: (-1,1)\to C$ для $\nu,\mu\in C$ – функция Ферерса первого рода.

Следующие оценки для функции Ферерса первого рода с целочисленной степенью и порядком будут полезны. Если $\theta\epsilon[0,\pi]$ и $m,n\;\epsilon\;N_0$ тогда

$$|P_n^m(\cos\theta)|\le\frac{(m+n)!}{n!}\qquad(8)$$

и если $\theta\epsilon(0,\pi)$ тогда

$$|P_n^m(\cos\theta)|\le 2\frac{(m+n)!}{n!}(\pi n)^{-1/_2}(\cos\theta)^{m+1/_2}\qquad(9)$$

Теорема 4.

Пусть n, m $\in N_0$, с $n\ge m$, $v\epsilon C\,/\{2m,2m+2,2m+4,\dots\}$, r, $r^i\in(0,\infty)$, $r\neq r^i$, $\theta'\epsilon(0,n)$, затем

$$\int_0^\pi (x^2-1)^{\frac{v+1}{4}} Q_{m-\frac{1}{2}}^{-\frac{v+1}{2}}(x) P_n^m(\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{v+2}{2}} d\theta$$

$$= \frac{i\sqrt{\pi}}{2^{\frac{v+1}{2}}(\sin\theta')^{v/2}} \left(\frac{r_>^2 - r_<^2}{rr'}\right)^{\left(v+\frac{2}{2}\right)} Q_n^{-\frac{v+2}{2}}\left(\frac{r^2+r'^2}{2rr'}\right) P_n^m(\cos\theta') \quad (10)$$

где

$$x = \frac{\mathrm{r}^2+\mathrm{r}'^2-2\mathrm{rr}'\cos\theta\cos\theta'}{2\mathrm{rr}'\sin\theta\sin\theta'} \quad (11)$$

и $\mathrm{r}_{\gtrless} = {}^{min}/_{max}\{\mathrm{r},\mathrm{r}'\}$

Доказательство. Начнем со следующей теоремы сложения для ассоциированной функции Лежандра второго рода (см. [3]), а именно для $\theta \in (0,\pi)$,

$$(x^2-1)^{\frac{v+1}{4}} \sin\theta^{v/2} Q_{m-\frac{1}{2}}^{-\frac{v+1}{2}}(x)$$

$$= \frac{i\sqrt{\pi}}{2^{\frac{v+1}{2}}} (\sin\theta')^{v/2} \left(\frac{r_>^2 - r_<^2}{rr'}\right)^{\left(v+\frac{2}{2}\right)}$$

$$* \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^{-\frac{v+2}{2}}\left(\frac{r^2+r'^2}{2rr'}\right) P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta'), \quad (12)$$

где X>1 определяется формулой (12). Согласно (8) бесконечный ряд равномерно сходится при $\theta\epsilon[0,\pi]$. Поэтому, если мы умножим обе части (12) $\sin\theta\ P_{n'}^m(\cos\theta)$, где $n'\epsilon N_0$ и интегрируя по $\theta\epsilon(0,\pi)$ мы получим (10).

Ортогональность порядка для связанных функций Лежандра с целой степенью и порядком

В этом пункте мы воспользуемся соотношением порядка ортогональности для функции Ферререса первого рода с целочисленной степенью и порядком

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{m,m'} \quad (13)$$

где $m \geq 1$

Теорема 5. Пусть $m\ \epsilon\ N, n\ \epsilon\ N_0\ c\ 1 \leq m \leq n, \theta'\epsilon[0,\pi], \varphi,\varphi'\epsilon[0,2\pi)$, затем

$$\int_0^\pi P_n(\cos\gamma) P_n^m(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta} d\theta = \frac{2}{m} P_n^m(\cos\theta')\cos\big(m(\varphi-\varphi')\big),$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

Доказательство. Начнем с теоремы сложения для сферических гармоник, а именно

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=-n}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta') e^{im(\varphi-\varphi')}, \quad (14)$$

Где для $P_n: C \to C,$ для $n \epsilon N_0$, является многочленом Лежандра, который можно определить в терминах конечного гипергеометрического ряда Гаусса следующим образом

$$P_n(z) \coloneqq F_1\left(\begin{matrix}-n, n+1\\ 1\end{matrix}; \frac{1-z}{2}\right)$$

Затем мы воспользуемся соотношением порядка ортогональности для функций Ферререса первого рода с целочисленной степенью и порядком. Если мы умножим обе части (13) на $(\sin\theta)^{-1} P_n^{m'}(\cos\theta)$ и интегрируем по $\theta\epsilon(0,\pi)$ используя (12), получаем желаемый результат.

Теорема 5, вытекающая из (14), является единственным примером определенного интеграла, который мы могли бы найти, используя соотношение ортогональности порядка для функций Ферререса первого рода (13). Поэтому мы подозреваем, что этот результат известен ранее, и включаем его главным образом для полноты картины. Однако было бы очень интересно найти другой пример, использующий это соотношение ортогональности.

Ортогональность многочленов Чебышева первого рода

Воспользуемся *преимуществами* ортогональностью многочленов Чебышева первого рода

$$\int_0^\pi T_m(cos\theta) T_n(cos\theta) d\theta = \frac{\pi}{\epsilon_n}\delta_{m,n}, \tag{15}$$

где $T_n : C \to C,$ для $n \epsilon N_0$ многочлен Чебышева первого рода, который может быть определен в терминах конечного гипергеометрического ряда Гаусса

$$T_n(z) = {}_2F_1\left(\begin{pmatrix}-n, n\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}; \frac{1-z}{2}\right).$$

Многочлены Чебышева первого рода удовлетворяют тождеству

$$T_n(cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Теорема 6.

Пусть $m, n \in Z,\ \sigma, \sigma' \in (0, \infty)$. Тогда

$$\int_0^\pi Q_{m-1/2}(\chi)\cos(n\,\psi)d\psi = \pi(-1)^m\sqrt{sinh\sigma sinh\sigma'}\cdot$$

$$\frac{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)} P^m_{n-1/2}(cosh\sigma_<) Q^m_{n-1/2}(cosh\sigma_>), \tag{16}$$

Где

$$\chi = coth\sigma coth\sigma' - csch\sigma csch\sigma' cos\psi \tag{17}$$

Доказательство

Начнем с тороидальных координат на R^3. А именно

$$x = \frac{\alpha sinh\sigma cos\phi}{cosch\sigma - cos\psi}, \qquad y = \frac{\alpha sinh\sigma sin\phi}{cosh\sigma - cos\psi}, \quad z = \frac{\alpha sin\psi}{cosh\sigma - cos\psi},$$

где $\alpha > 0, \sigma \in (0, \infty), \psi, \phi \in [0,2\pi)$. Обратное расстояние между двумя точками $x, x' \in R^3$ определяется алгебраически следующим образом

$$\frac{1}{\|x-x'\|} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{(cosh\sigma - cos\psi)(cos\sigma' - cos\psi')}{2sinh\sigma sinh\sigma'}} \cdot \left[\frac{cosh\sigma cosh\sigma' - \cos(\psi-\psi')}{sinh\sigma sinh\sigma'} - \cos(\phi - \phi')\right]^{1/2},$$

Где (σ', ψ', ϕ') - тороидальные координаты, соответствующие точке x_0. Используя идентичность Гейне обратного квадратного корня, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{z-x}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \, Q_{m-1/2}(z) T_m(x),$$

Где $z > 1$ и $x \in [-1,1]$, мы можем получить представление рядов косинусов Фурье для обратного расстояния между двумя точками в тороидальных координатах на R^3, а именно

$$\frac{1}{\|x-x'\|} = \frac{1}{\pi\alpha}\sqrt{\frac{(cosh\sigma - cos\psi)(cos\sigma' - cos\psi')}{sinh\sigma sinh\sigma'}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos\big(m(\phi - \phi')\big) \, Q_{m-1/2}(\chi),$$

Где $x > 1$ согласно (17). Мы можем расширить ассоциированные многочлены Лежандра второго рода, используя следующую теорему сложения

$$Q_{m-1/2}(\chi) = (-1)^m \sqrt{sinh\sigma sinh\sigma'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos\big(n(\psi - \psi')\big) \cdot \frac{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)} P^m_{n-1/2}(cosh\sigma_<) Q^m_{n-1/2}(cosh\sigma_>), \tag{18}$$

Отметим, что с помощью приведенной выше теоремы сложения мы имеем разложение обратного расстояния между двумя точками в тороидальных координатах.

$$\frac{1}{\|x-x'\|} = \frac{1}{\pi\alpha}\sqrt{(cosh\sigma - cos\psi)(cos\sigma' - cos\psi')} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \epsilon_m \cos\big(m(\phi - \phi')\big) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos\big(n(\psi - \psi')\big) \cdot \frac{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)} P^m_{n-1/2}(cosh\sigma_<) Q^m_{n-1/2}(cosh\sigma_>)$$

Если мы заменим $\psi - \psi' \to \psi$ и перемножим обе стороны (18) на $\cos(n\psi)$ и проинтегрируем $\psi \in [0, \pi]$. Тогда, согласно (15), мы получим (16).

В проведенной работе ортогональность и преобразование Ханкеля используются для генерации решений новых определенных интегралов на основе известных интегралов. С помощью данных теорем можно создавать более мощные инструменты для решения определенных интегралов, также данные теоремы существенно упрощают работу с различными дифференциальными уравнениями, приводящими к ортогональным многочленам.

Список литературы

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961 г. - 524 стр.
2. А. И. Лурье, Я. С. Уфлянд, “И. Снеддон, “Преобразования Фурье” (рецензия)”, УМН, 12:2(74) (1957), 252–254 стр.
3. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956 г. – 204 стр.
4. Хованский А. Г., Полиномы Чебышёва и их обращения // Математическое просвещение. — 2013. — № 17. — С. 93—106.