

УДК 536.2.081.7

## НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В МНОГОСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ И НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Плотцев Н.И., Пересунько Д.А.

*Самарский государственный технический университет, г. Самара*

Используя метод конечных разностей, выполнено детальное исследование охлаждения многослойной пластины, толщина которой является функцией времени – на слой – основание с некоторым интервалом последовательно накладываются пять слоев. Результаты исследования позволили определить оптимальные режимы охлаждения конструкции, а также характерные особенности. Показано, что при значительно отличающихся теплофизических свойствах слоев, охлаждение слоя с более высоким коэффициентом теплопроводности происходит практически при отсутствии градиента температуры по пространственной переменной. Охлаждение остальных слоев с низким коэффициентом теплопроводности происходит в форме параболического профиля температуры с максимумом внутри слоя. Причем координаты максимума температуры зависят от выбранного способа охлаждения и изменяются во времени.

**Ключевые слова:** многослойные конструкции, неоднородные граничные условия, аналитические методы, нестационарная теплопроводность, коэффициент теплоотдачи, условия сопряжения, аппроксимация дифференциальных операторов

## NONSTATIONARY HEAT EXCHANGE IN MULTILAYERED DESIGN WITH VARIABLE INITIAL AND NON-SYMMETRIC BOUNDARY CONDITIONS

Plottsev N.I., Peresunko D.A.

Using the finite-difference method, a detailed study of the cooling of a multilayer plate, the thickness of which is a function of time, is performed - five layers are successively superimposed on a layer - base with a certain interval. The results of the study allowed to determine the optimal cooling regimes of the structure, as well as the characteristic features. It is shown that with significantly differing thermophysical properties of the layers, the cooling of the layer with a higher thermal conductivity coefficient occurs practically in the absence of a temperature gradient over the spatial variable. The remaining layers with a low thermal conductivity are cooled in the form of a parabolic temperature profile with a maximum inside the layer. Moreover, the coordinates of the maximum temperature depend on the chosen cooling method and vary with time.

**Keywords:** multilayer structures, inhomogeneous boundary conditions, analytical methods, nonstationary thermal conductivity, heat transfer coefficient, conjugation conditions, approximation of differential operators.

---

**Актуальность проблемы.** Многослойные конструкции находят весьма широкое применение в технике. Во многих случаях возникает надобность определения их температурного состояния. Задачи теплопроводности для подобных конструкций существенно усложняются в случаях переменных в пределах каждого слоя начальных условиях и неоднородных граничных условиях третьего рода. Какие – либо аналитические методы будь это точные или приближенные, решения указанных задач в настоящее время не разработаны. Получение их аналитических решений сильно усложняется необходимостью выполнения условий сопряжения между слоями, задаваемых в виде равенства температур и тепловых потоков в точках контактов слоев. В связи с чем, при получении аналитического решения возникает необходимость определения корней системы трансцендентных уравнений, которая может быть решена лишь численными методами [1 – 5].

**Решение задачи.** В данной работе выполнено исследование краевой задачи нестационарной теплопроводности для многослойной пластины [6 – 11], толщина которой является функцией времени. Количество слоев изменяется от  $n = 1$  до  $n = 6$ . Причем в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) пластина состоит из одного слоя (слоя – основания), на который через некоторые интервалы времени  $\Delta\tau_i$  накладываются последующие (рис.1).

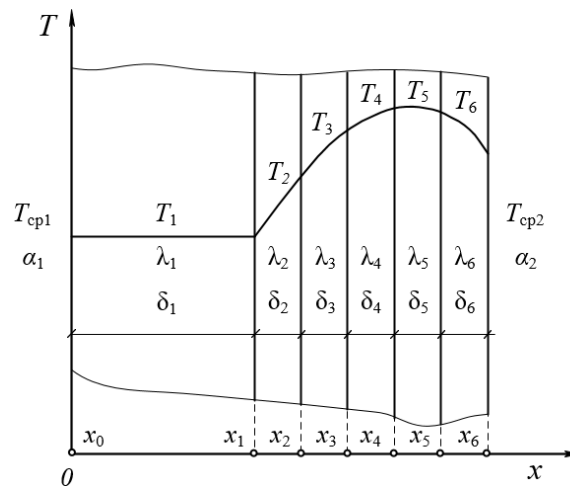


Рисунок 1. Расчетная схема теплообмена в многослойной конструкции

При исследовании процесса теплообмена [2], ставилась задача разработки оптимального режима охлаждения конструкции, путем выбора значений  $\Delta\tau_i$ . То есть определялись такие временные интервалы между наложением слоев, при которых многослойная пластина охлаждалась бы наиболее интенсивно и равномерно. Расчет температурных режимов производился при  $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = 0$  и, следовательно,  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ . В данном случае предполагалось, что первый и второй слой определены в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ).

Изменение температуры в каждом слое описывается уравнением теплопроводности вида

$$\frac{\partial T_i(x, \tau)}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 T_i(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i; \tau_i < \tau < \infty; i = \overline{1, 6}). \quad (1)$$

Исходя из начальных условий для отдельных слоев, запишется в виде.

$$T_i(x, \tau_i) = T_{ни} \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i; (i = \overline{1, 6})).$$

На внешних поверхностях первого слоя ( $i = 1$ ) при любых  $\tau_1 < \tau < \tau_2$  действуют граничные условие третьего рода, теплообмен на поверхности пластины протекает согласно закону Ньютона – Рихмана, при этом коэффициенты теплоотдачи на противо-положных поверхностях не равны ( $\alpha_2 \neq \alpha_1$ ).

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} + \alpha_1(T_1(0, \tau) - T_{cp1}) = 0; \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x_1, \tau)}{\partial x} + \alpha_2(T_1(x_1, \tau) - T_{cp2}) = 0. \quad (3)$$

При  $\tau > \tau_2$  для первого слоя задаются условие (2) и условия сопряжения со вторым слоем, выражающиеся в равенстве тепловых потоков и температур в точке  $x_1$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} + \alpha_1(T_1(0, \tau) - T_{cp1}) = 0; \quad (4)$$

$$T_1(x_1, \tau) = T_2(x_1, \tau); \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x_1, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x_1, \tau)}{\partial x}. \quad (6)$$

Для слоев  $i = \overline{2, 5}$  при  $\tau_i < \tau < \tau_{i+1}$  в точке  $x_i$  задается граничное условие третьего рода

$$\lambda_i \frac{\partial T_i(x_i, \tau)}{\partial x} + \alpha_2(T_i(x_i, \tau) - T_{cp2}) = 0, \quad (7)$$

а в точке  $x_{i-1}$  – условия сопряжения со слоем  $i - 1$

$$T_{i-1}(x_{i-1}, \tau) = T_i(x_{i-1}, \tau); \quad \lambda_{i-1} \frac{\partial T_{i-1}(x_{i-1}, \tau)}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial T_i(x_{i-1}, \tau)}{\partial x}. \quad (8)$$

При  $\tau > \tau_{i+1}$  (после наложения слоя  $i + 1$ ) в точке  $x_i$  выполняются условия сопряжения со слоем  $i + 1$

$$T_i(x_i, \tau) = T_{i+1}(x_i, \tau); \quad (9)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_i(x_i, \tau)}{\partial x} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(x_i, \tau)}{\partial x}. \quad (10)$$

Для последнего слоя выполняется условие (7) и условия сопряжения (5), (6).

Соотношения (1) – (10) представляют математическую постановку задачи теплопроводности для многослойной пластины, толщина которой является кусочно – заданной функцией времени  $\delta(\tau)$  (рис. 2).

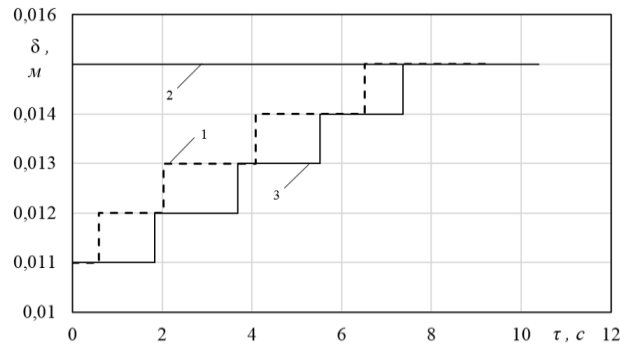


Рисунок 2. Изменение толщины пластины во времени:

1, 2, 3 – соответственно первый, второй и третий способы охлаждения

Используя метод конечных разностей, (1) – (12) представлялась в виде системы алгебраических линейных уравнений. Для ее решения в рассматриваемой области вводилась пространственно–временная сетка с шагами  $\Delta x$ ,  $\Delta \tau$  соответственно по переменным  $x$ ,  $\tau$  так, что

$$X_j = j\Delta x, \quad j = \overline{0, J}; \quad t_k = k\Delta \tau, \quad k = \overline{0, K}, \quad (11)$$

где  $J, K$  – число шагов по координатам  $x$ ,  $\tau$ . В расчете  $\Delta x$  и  $\Delta \tau$  принимались равными  $\Delta x = 0,0002$  м,  $\Delta \tau = 0,0002$  с.

На сетке (11) определялись сеточные функции

$$\Theta_{ij}^k = T_i(X_j, t_k),$$

Используя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (1) – (10), для первого слоя запишется в виде

$$\frac{\Theta_{1j}^{k+1} - \Theta_{1j}^k}{\Delta \tau} = a_1 \frac{\Theta_{1j-1}^k - 2\Theta_{1j}^k + \Theta_{1j+1}^k}{\Delta x^2}; \quad (x_0 \leq X_j \leq x_1)$$

$$(12) \Theta_{1j}^0 = T_{1н}; \quad (13)$$

$$-\lambda_1 \frac{\Theta_{11}^k - \Theta_{10}^k}{\Delta x} + \alpha_1 (\Theta_{10}^k - T_{сп1}) = 0; \quad (14)$$

$$\lambda_1 \frac{\Theta_{1j}^k - \Theta_{1j-1}^k}{\Delta x} + \alpha_2 (\Theta_{1j}^k - T_{cp2}) = 0. \quad (X_j = x_1) \quad (15)$$

Где  $i$  – ый слой определен, аналогично можно сформулировать для любого слоя в диапазоне времени.

При решении задачи использовались следующие исходные данные:  $\delta_1 = 10$  мм;  $T_{н1} = 20^\circ\text{C}$ ;  $\lambda_1 = 150$  Вт/(м К);  $a_1 = 8,5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с;  $\delta_i = 1$  мм,  $T_{ни} = 80^\circ\text{C}$ ,  $\lambda_i = 0,2$  Вт/(м К),  $a_i = 1,5 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с ( $i = \overline{2, 6}$ );  $T_{cp1} = T_{cp2} = 20^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_1 = 15$  Вт/(м<sup>2</sup> К);  $\alpha_2 = 80$  Вт/(м<sup>2</sup> К).

В данной работе рассмотрены три способа охлаждения конструкции при неизменных условиях теплообмена с окружающей средой и теплофизических свойствах слоев. Охлаждение пластины при реализации осуществлялось до момента, когда максимальное значение температуры  $T_{\max}$  в пластине после наложения всех слоев не превышало бы некоторого значения  $T_{\max}^* = 70^\circ\text{C}$ . Время, при котором  $T_{\max} = T_{\max}^*$  является критерием сравнения интенсивности охлаждения различными способами. Помимо  $\tau_{\max}$  осуществлялось изменение средней температуры всей конструкции ( $T_{cp}^{1-6}$ ) и средней температуры слоев 2 – 6 ( $T_{cp}^{2-6}$ ) (без учета температуры слоя – основания).

Отдельно исследовано влияние условий теплообмена с окружающей средой (коэффициентов теплоотдачи на противоположных поверхностях, температуры среды) на интенсивность охлаждения конструкции [6].

**Анализ результата.** Рассмотрим способ охлаждения многослойной конструкции, согласно которому наложение  $i$  – го слоя происходит при снижении максимальной температуры всех предыдущих слоев до значения температуры  $T_{\max}^* = 70^\circ\text{C}$  (см. рис. 2 кривая 1, рис. 3).

На рис. 3, 4 изображены графики изменения температуры соответственно по пространственной и временной переменным. Из их анализа следует, что при реализации данного способа слои должны накладываться в моменты времени  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  с;  $\tau_3 = 0,5905$  с;  $\tau_4 = 2,0304$  с;  $\tau_5 = 4,0764$  с;  $\tau_6 = 6,5124$  с, то есть интервалы между наложением слоев  $\Delta\tau_i$  должны увеличиваться. Следовательно, для снижения максимальной температуры пластины до  $T_{\max}^* = 70^\circ\text{C}$  требуется все большее количество времени. При этом отмечается, что при наложении слоев в диапазоне времени  $0 < \tau < 8,7$  с значение пространственной переменной  $x_{\max}$ , в которой температура имеет максимальное

значение  $T_{\max}$  (в данный момент времени) находится в пределах последнего наложенного слоя (см. рис. 5). Этот факт имеет особое значение при фазовых превращениях вещества в процессе охлаждения (например, при кристаллизации). В этом случае, при верном определении величин  $T_{\max}^*$  и  $\tau_i$  может быть реализован процесс фазового перехода лишь в последнем наложенном слое.

Наличие скачков функции  $x_{\max}(\tau)$  на рис. 5 обусловлено величиной шага  $\Delta x = 0,0002$  с в расчетной схеме метода конечных разностей. В действительности, при любом из рассмотренных способов охлаждения пластины, разрывы функции  $x_{\max}(\tau)$  имеют место лишь в моменты наложения слоев  $\tau_i$  (пунктир на рис. 5).

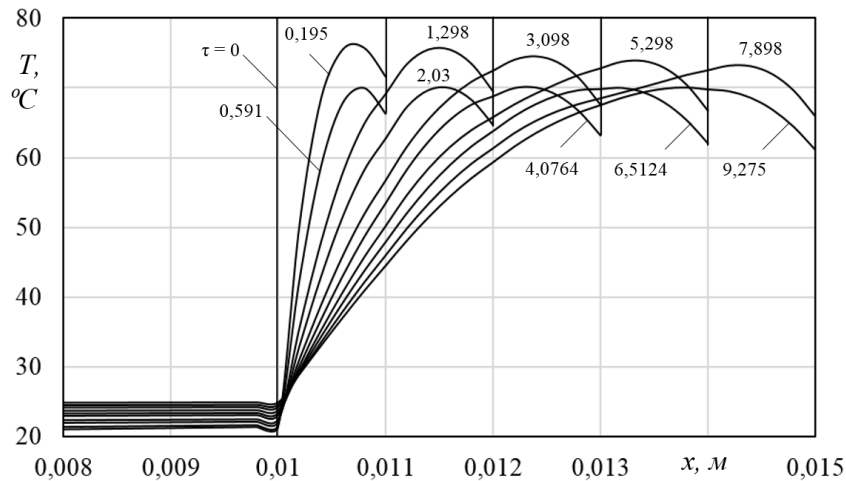


Рисунок 3. Распределение температуры по координате

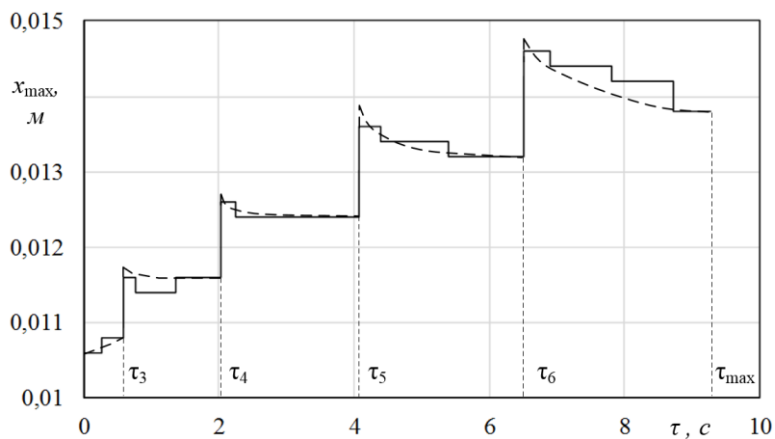


Рисунок 4. Перемещение координаты максимума температур  $x_{\max}$  во времени (способ №1)

На рис. 5. Показаны графики изменения температур  $T_{\max}$ ,  $T_{\text{cp}}^{1-6}$ ,  $T_{\text{cp}}^{2-6}$  во времени. Из их анализа следует, что интенсивность снижения максимальной температуры ( $dT_{\max} / dt$ ) с

течением времени уменьшается. Значение средней температуры всей конструкции постепенно увеличивается вплоть до значения  $T_{\text{cp}}^{1-6} = 35,797 \text{ } ^\circ\text{C}$  в момент времени  $\tau_{\text{max}} = 9,275 \text{ c}$ . Средняя температура  $T_{\text{cp}}^{2-6}$  при этом составит  $T_{\text{cp}}^{2-6} = 58,244 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

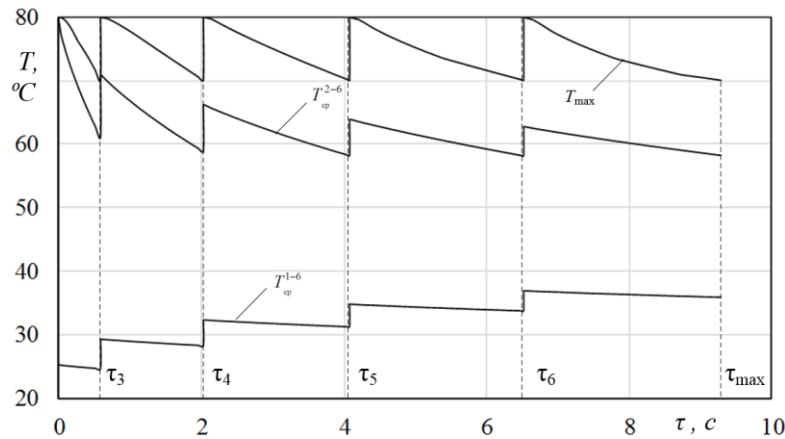


Рисунок 5. Графики изменения температур  $T_{\text{max}}$ ,  $T_{\text{cp}}^{1-6}$ ,  $T_{\text{cp}}^{2-6}$  во времени (способ №1)

Основными характеристиками способа охлаждения пластины являются:  $\tau_1, c=0$ ;  $\tau_2, c=0$ ;  $\tau_3, c=0,5905$ ;  $\tau_4, c=2,0304$ ;  $\tau_5, c=4,0764$ ;  $\tau_6, c=6,5124$ ;  $\tau_{\text{max}}, c=9,275$ ;  $T_{\text{cp}}^{1-6}, \text{ } ^\circ\text{C}=35,797$ ;  $T_{\text{cp}}^{2-6}, \text{ } ^\circ\text{C}=58,2442$ .

**Вывод.** Показано, что при значительно отличающихся теплофизических свойствах слоев, охлаждение слоя с более высоким коэффициентом теплопроводности происходит практически при отсутствии градиента температуры по пространственной переменной. Охлаждение остальных слоев с низким коэффициентом теплопроводности происходит в форме параболического профиля температуры.

При реализации рассмотренного способа охлаждения многослойной пластины максимум температуры перемещается внутри тела. Причем при охлаждении максимум может быть локализован в пределах последнего накладываемого слоя.

При наложении слоев, происходит повышение уровня средней температуры  $T_{\text{cp}}^{1-6}$ . Поэтому, при увеличении количества слоев для их охлаждения до одного и того же значения  $T_{\text{max}}^*$  требуется все большее количество времени. Поэтому интервалы между их наложением  $\Delta\tau_i$  должны увеличиваться. В случае, если  $\Delta\tau_i = \text{const}$  требуется периодическое снижение средней температуры  $T_{\text{cp}}^{1-6}$  при повышенных коэффициентах теплоотдачи.

Наиболее эффективным способом интенсификации процесса теплообмена между охлаждаемой пластиной и окружающей средой является повышение коэффициента теплоотдачи  $\alpha_2$  при одновременном снижении температуры среды  $T_{cp2}$ . Увеличение коэффициента теплоотдачи на поверхности первого слоя с высокой теплопроводностью обоснованно лишь при существенном снижении температуры среды  $T_{cp1}$ .

### Список литературы

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
  2. Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б. Методы теории теплообмена. М.: Высшая школа, 1970. 288 с.
  3. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
  4. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 195 с.
  5. Темников А.В., Игонин В.И., Кудинов В.А. Приближенные методы решения задач теплопроводности. Куйбышев: КПТИ, 1982. 90 с.
  6. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
  7. Калашников В.В., Кудинов В.А., Лаптев Н.И., Гнеденко В.В. Теория теплообмена и теплового взрыва однослойных и многослойных композиций взрывчатых веществ. Самара: СамГТУ, 1995. 84 с.
  8. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высшая школа, 2005. 430 с.
  9. Кудинов В.А., Калашников В.В., Лаптев Н.И., Гнеденко В.В. Теплообмен и тепловое воспламенение в многослойных конструкциях. Самара: СамГТУ, 1996. 280 с.
  10. Кудинов В.А., Калашников В.В., Карташов Э.М., Лаптев Н.И., Сергеев С.К. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат. 1997. 426 с.
  11. Еремин А.В., Жуков В.В. Исследование теплообмена в многослойной пластине при несимметричных граничных условиях / «Аспирант». Ростов-на-Дону, 2015. №8(2). С. 68–71.
-