УДК 536.2.083

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ

Плотцев Н.И., Пересунько Д.А.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

Передача тепла теплопроводностью при стационарном режиме происходит тогда, когда температура в каждой точке рассматриваемого тела с течением времени остается неизменной. На основе использования теории обобщенных функций получено точное аналитическое решение стационарной задачи теплопроводности для многослойной конструкции с источниками теплоты при несимметричных граничных условиях третьего рода. Используя асимметричную единичную функцию Хевисайда, задача для многослойной конструкции приводится к однослойной с разрывными свойствами среды. Введением новой независимой переменной, нелинейное дифференциальное уравнение сводится к линейному, непосредственное интегрирование которого позволяет получать достаточно простого вида точное аналитическое решение рассматриваемой задачи. Приводятся примеры исследования температурных полей для конкретных многослойных конструкций.

Ключевые слова: многослойные конструкции, источники теплоты, теория обобщенных функций, асимметричная единичная функция, несимметричные граничные условия, точное аналитическое решение

A GENERALIZED FUNCTION IN HEAT CONDUCTIVITY PROBLEMS FOR MULTILAYER STRUCTURES WITH HEAT SOURCES

Plottsev N.I., Peresunko D.A.

Heat transfer by heat conduction in stationary mode occurs when the temperature at each point of the body under consideration remains unchanged over time. Using the theory of generalized functions, an exact analytical solution is obtained for the stationary heat conduction problem for a multilayer structure with heat sources under asymmetric boundary conditions of the third kind. Using the asymmetric unit, Heaviside function, the problem for a multi-layer construction is reduced to a single-layer with discontinuous properties of the medium. By introducing a new independent variable, a nonlinear differential equation reduces to a linear one, direct integration of which allows us to obtain a fairly simple form of an exact analytical solution of the problem in question. Examples of the study of temperature fields for specific multilayer structures are given.

Keywords: multilayer constructions, heat sources, theory of generalized functions, asymmetric unit function, asymmetric boundary conditions, exact analytical solution

Стационарная теплопроводность. Важной теплофизической характеристикой является коэффициент теплопроводности λ, Вт/(м.К), показывающий количество теплоты, проходящей через единицу поверхности в единицу времени при единичном градиенте температуры. Коэффициент теплопроводности зависит от вида среды, структуры вещества, температуры и т.д. Наибольшая теплопроводность наблюдается у металлов и сплавов, наименьшая - у газов. Коэффициент теплопроводности неметаллических твердых тел во многом зависит от их плотности, которая, в свою очередь, зависит от пористости. Увеличение пористости вызывает уменьшение плотности и, как следствие, снижение коэффициента теплопроводности. Интенсивность процесса стационарной теплопроводности оценивают с помощью плотности теплового потока. При стационарном режиме плотность тепловых потоков, проходящих через каждый слой стенки, одинакова.

Актуальность проблемы. Решение краевых задач стационарной теплопроводности для многослойных конструкций с внутренними источниками тепла в классической математической постановке выполняется методом сопряжения и в конечном итоге приводится к решению систем алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных коэффициентов. При увеличении числа слоев создаются определенные трудности получения решений и проведения технических расчетов, которые при решении нестационарных задач становятся практически непреодолимыми на аналитическом уровне.

Решение задачи. Эффективным методом составления дифференциальных уравнений и решения соответствующих краевых задач является метод, в котором используется теория обобщенных функций [1 —5]. Следуя этому методу, физические свойства многослойной конструкции с помощью единичной асимметричной функции можно описать как для одного слоя с разрывными свойствами среды. В качестве основного примера применения этого метода рассмотрим многослойную плоскую стенку δ_i(i=$\overline{1.n}$)- толщины слоев (рис. 1), находящуюся в условиях теплообмена с окружающей средой, протекающего при граничных условиях третьего рода. Предположим, что в пределах каждого слоя коэффициент теплопроводности материала и интенсивность внутренних источников теплоты постоянны, а между слоями осуществляется идеальный тепловой контакт. [6 – 11].

Представим постоянные в пределах каждого слоя значения коэффициентов теплопроводности и мощности внутренних источников теплоты через асимметричную единичную.

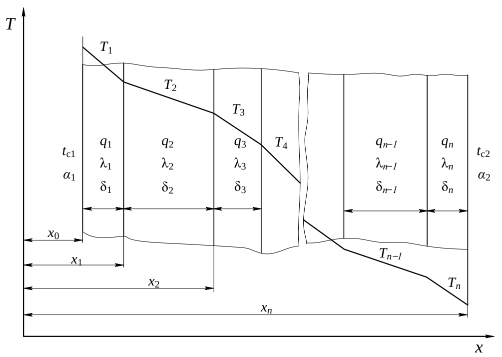
Рис. 2. Распределение температуры в двухслойной пластине при использовании независимой переменной функцию в следующем виде

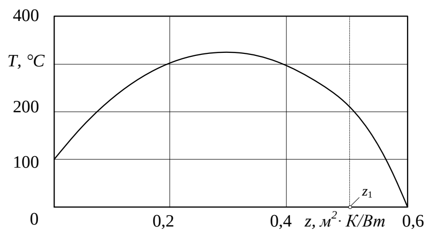
$$\lambda(x) = \lambda_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) S(x - x_i) \; q(x) = q_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} - q_i) S(x - x_i) \qquad (1)$$

где $S(x - x_i)$ — асимметричная единичная функция, определяемая по соотношению

$$S(x-x_i)=\begin{cases}0 \text{ при } x<x_i;\\ 1 \text{ при } x\geq x_i;\end{cases} \quad (2)$$

λ_i, q_i – коэффициент теплопроводности и интенсивность внутреннего источника теплоты в i – ом слое.





Рисуноук 1 *Рисунок 2*

Математическая постановка задачи теплопроводности для многослойной конструкции с учетом (1) – (3) приводится к задаче теплопроводности для одного слоя с разрывными (кусочно – однородными) свойствами среды, имеющей вид (рис. 1)

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(x)\frac{dT}{dx}\right]=-q(x); \quad (3)$$

$$\lambda_1\frac{dT(x_0)}{dx}=\alpha_1[\beta_1T(x_0)-t_{c1}];\ \lambda_n\frac{dT(x_n)}{dx}=\alpha_2[t_{c2}-\beta_2T(x_n)], \quad (4)$$

Где α_1,α_2— коэффициенты теплоотдачи; t_{c1},t_{c2} - температуры сред; β_1,β_2 — коэффициенты, принимающие в зависимости от вида граничных условий значения ноль или единица.

Общий вид граничных условий (4) варьируя коэффициентами $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ позволяет получать все три вида граничных условий (первого, второго и третьего рода), которые могут задаваться при теплообмене многослойной стенки с окружающей средой.

Непосредственное интегрирование уравнения (3) приводит к следующему соотношению:

$$T(x)=-\int_{x_0}^{x}\left[\frac{1}{\lambda(\xi)}\int_{x_0}^{x}q(\xi)d\xi\right]d\xi+C_1\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\lambda(\xi)}+C_2 \quad (5)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Определив интегралы в (5) и постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (4) можно получить искомое решение. Однако такой путь приводит к весьма громоздкому выражению для аналитического решения. В связи с чем рассмотрим другой способ получения более простого решения. Для этого введем новую независимую переменную *z* по соотношению [2]

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} [1/\lambda(x)]dx, \tag{6}$$

где $1/\lambda(x)$ по аналогии с (1), (2) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right)S(x - x_i). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), находим:

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\lambda_1} + \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right)S(x - x_i)dx$$

Продифференцируем соотношение (6) по переменной x

$$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{1}{\lambda(x)}$$

Так как переменная *z* является функцией *x*, то справедливы следующие соотношения:

$$\lambda(x)\frac{dT(x)}{dx} = \lambda(x)\frac{dT(z)}{dz}\frac{dz}{dx} = \lambda(x)\frac{dT(z)}{dz}\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{dT(z)}{dz}$$

Отсюда следует, что производная от температуры по переменной *z* является мерой теплового потока

$$\frac{dT(z)}{dz} = \lambda(x)\frac{dT(x)}{dx}$$

С учетом приведенных соотношений дифференциальный оператор левой части уравнения (3) будет:

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(x)\frac{dT(x)}{dx}\right] = \frac{d}{dz}\left[\frac{dT(z)}{dz}\right]\frac{dz}{dx} = \frac{d^2T(z)}{dz^2}\frac{1}{\lambda(z)}$$

Отсюда математическая постановка задачи (3), (4) принимает вид:

$$\frac{d^2T(z)}{dz^2} = -\lambda(z)q(z); \quad (z_0 < z < z_n;\ z_0 = 0) \tag{8}$$

$$-dT(0)/dz + \alpha_1(\beta_1 T(0)) - t_{c1}) = 0 \; dT(z_n)/dz + \alpha_2(\beta_2 T(z_n)) - t_{c2}) = 0 \tag{9}$$

Для произведения $\lambda(z)q(z)$ по аналогии с (1) можно записать

$$\lambda(z)q(z)=\lambda_1 q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)S(z-z_i)$$

где. S (Z - Z_i,) определяется соотношением, аналогичным соотношению (2).

Очевидно, что уравнение (8) для непосредственного интегрирования является более простым, чем уравнение (3). Интегрируя уравнение (8). Находим

$$\frac{dT}{dz}=-\int_0^z\lambda_1 q_1 dz-\int_{z_i}^{z}\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)S(z-z_i)dz+C_1 \qquad (10)$$

где C 1 – постоянная интегрирования.

Определяя интегралы в (10), получаем:

$$\frac{dT}{dz}=-\lambda_1 q_1 z-\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)(z-z_i)S(z-z_i)+C_1 \qquad (11)$$

Интегрируя соотношение (11), получаем:

$$T(z)=-\int_0^z\lambda_1 q_1 z dz-\int_{z_i}^{z}\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)(z-z_i)S(z-z_i)dz+\int_0^z C_1 dz+C_2 \qquad (12)$$

Определяя интегралы в правой части соотношения (12), находим:

$$T(z)=-\frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)(z-z_i)^2 S(z-z_i)+C_1 z+C_2 \qquad (13)$$

Постоянные интегрирования *C₁* и *C₂* находятся из граничных условий (9). Для этого из соотношений (11), (13) необходимо найти $dT(0)/dz$, $dT(z_n)/dz$, $T(0)$, $T(z_n)$ которые будут иметь вид $T(0)=C_2$; $dT(0)/dz=C_1$,

$$T(z_n)=-\frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z_n^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)(z_n-z_i)^2+C_1 z_n+C_2;$$

$$dT(z_n)/dz=-\lambda_1 q_1 z_n-\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)(z_n-z_i)+C_1$$

Подставляя последние соотношения в (9) относительно C_1 и C_2 будем иметь систему двух алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим:

$$C_1=-\frac{\alpha_1(\alpha_2\beta_2 t_{c1}-\alpha_2\beta_1 t_{c2}-\beta_1\omega)}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 z_n};\quad C_2=-\frac{\alpha_1 t_{c1}+\alpha_2 t_{c2}+\alpha_1\alpha_2\beta_2 z_n t_{c1}+\omega}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 z_n} \qquad (14)$$

Где

$$\omega=\lambda_1 q_1 z_n+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)(z_n-z_i)++\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\left[\lambda_1 q_1 z_n^2+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1}-\lambda_i q_i)(z_n-z_i)^2\right] \qquad (15)$$

$$z_n = \frac{x_n - x_0}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right)(x_n - x_i)$$

Подставляя (14) в решение (13), получаем:

$$T(z) = -\frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1} - \lambda_i q_i)(z - z_i)^2 S(z - z_i) +$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2(\beta_1 t_{c2} + \beta_2 t_{c1} + \beta_1\omega^*)}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 z_n} z + \frac{\alpha_1(1 + \alpha_2\beta_2 z_n)t_{c1} + \alpha_2(t_{c2} + \omega^*)}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 z_n} \qquad (16)$$

Где $\omega^* = \omega/\alpha_2$.

Учитывая, что

$$z_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1}}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{\lambda_i}$$

и вводя обобщенный коэффициент теплопередачи по формуле:

$$k = 1/\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{\lambda_i} + \frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)$$

соотношение (16) преобразуется к виду:

$$T(z) = -\frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z^2 - \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1}(\lambda_{\mathrm{i}+1}q_{\mathrm{i}+1} - \lambda_{\mathrm{i}} q_{\mathrm{i}})(z - z_i)^2 S(z - z_i) +$$

$$+k\left[(\beta_1 t_{c2} - \beta_2 t_{c1} + \beta_1\omega^*)z + \left(\frac{1}{\alpha_2} + \beta_2 z_{\mathrm{n}}\right)t_{c1} + \frac{1}{\alpha_1}(t_{c2} + \omega^*)\right] \qquad (17)$$

где постоянная ω^* определяется из соотношения:

$$\omega^* = \frac{1}{\alpha_2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_i (z_i - z_{i-1}) + \frac{1}{2}\beta_2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_i\left[(z_n - z_{i-1})^2 - (z_n - z_i)^2\right] \qquad (18)$$

которое можно получить, если воспользоваться тождествами:

$$\lambda_1 q_1 z_n + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1} - \lambda_i q_i)(z_n - z_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_i (z_i - z_{i-1})$$

(19) $$\lambda_1 q_1 z_n + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}q_{i+1} - \lambda_i q_i)(z_n - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_i\left[(z_n - z_{i-1})^2 - (z_n - z_i)^2\right] \qquad (20)$$

где $z_0 = 0$.

Соотношение (17) в замкнутом виде определяет решение задачи (3), для всех трех видов граничных условий. Очевидно, что оно удовлетворяет уравнению (8) и граничным условиям (9)

Соотношение (17) для контакта двух тел при граничных условиях первого рода, то есть при $T(0) = t_{c1}$, $T(z_2) = t_{c2}$ принимает вид:

$$T(z) = -\frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z^2 - \frac{1}{2}(\lambda_2 q_2 - \lambda_1 q_1)(z - z_1)^2 S(z - z_1) +$$
$$+\left[(t_{c2} - t_{c1}) + \frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_2 q_2 - \lambda_1 q_1)(z_2 - z_1)^2\right]\frac{z}{z_2} + t_{c1} \qquad (21)$$

Используя соотношение (21), найдем решение конкретной задачи теплопроводности для двухслойной пластины с постоянными в пределах каждого слоя внутренними источниками теплоты при следующих исходных данных: λ_1 = 0,1 Вт/(м · К); λ_2 = 0,6 Вт/(м · К); q_1 = 5 10^4 Вт/м^3; q_2 = 5 · 10^4 Вт/м^3; δ_1 = 0,05 м; δ_2 = 0,05 м; t_{c1} = 200 °С; t_{c2} = 100 °С.

Результаты расчетов температуры по формуле (21) даны на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что толщины слоев при использовании в качестве пространственной координаты переменной z распределяются согласно их термическим сопротивлениям. Так как коэффициент теплопроводности первого слоя значительно меньше, чем второго, то при одинаковой толщине слоев (δ_1 = δ_2) толщина первого слоя в переменной *z* ввиду его большего термического сопротивления оказывается значительно большей, чем толщина второго слоя. При этом излом температурной кривой на границах слоев (при z = z_1) отсутствует. Это связано с тем, что в переменной z на границе слоев выполняется условие равенства тепловых потоков.

Распределение температуры при использовании в качестве пространственной координаты переменной *x* дано на рис. 3. В этом случае в точке контакта слоев (x = x_1) должно выполняться условие $\lambda_1 dT_1/dx = \lambda_2\, dT_2/dx$. В связи с чем, в точке $x = x_1$ наблюдается излом температурной кривой. Если положить $\lambda 1 = \lambda_2$, $q_1 = q_2 = 0$ то при заданных выше температурах на границах двухслойной системы в точке контакта слоев по формуле (21) получаем температуру *T* = 150 °С, что соответствует точному решению.

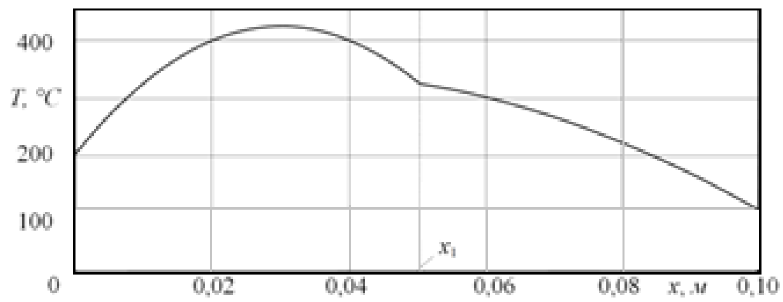


Рисунок 3

Рис. 3. Распределение температуры в двухслойной пластике при использовании независимой переменной *X*.

Выводы. На основе использования асимметричной единичной функции, задача для многослойной конструкции представлена в виде однослойной с переменными (кусочно-однородными) свойствами среды. Путем введения новой независимой переменной, представляющей термическое сопротивление стенки, получено дифференциальное уравнение, допускающее двукратное интегрирование с получением точного аналитического решения краевой задачи.

Применение единичной функции позволяет отказаться от непосредственного выполнения условий сопряжения в процессе получения решения, так как они включаются в дифференциальное уравнение и оказываются выполненными после его интегрирования.

Приведенный метод можно использовать при решении нелинейных задач теплопроводности для многослойных конструкций (с нелинейностью первого рода, когда физические свойства в каждом слое зависят от температуры), задач теплопроводности с нелинейными (зависящими от температуры) источниками теплоты, нестационарных задач теплопроводности для многослойных конструкций с внутренними источниками теплоты и других задач.

Список литературы

1. Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Курганова О.Ю., Ткачев В.К., Скворцова М.П. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С. 52-58.

2. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Высшая школа, 2008. 305 с.

3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.

5. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 520 с.

6. Вигак В.М. О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно – однородного тела. Докл. АН УССР, Сер. А, 1980, №1. С. 30.

7. Коляно Ю.М. Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно – однородных тел. – В кн. Математические методы и физико – механические поля. Киев: Наукова думка. 1978. Вып. 7. С. 7 – 11.

8. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М.: Машиностроение, 1973. 659 с.

9. Онанов Г.Г. Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функция и ее производных. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, №5. С. 997 – 1000.

10. Процюк Б.В. О решении задач теплопроводности и термоупругости для многослойных тел. Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, №11. С. 1019 – 1021.

11. Кудинов В.А., Кудинов И.В., Скворцова М.П. Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, №4. С. 129 – 140.